Ασκ Αν $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1} = 2$

Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$

Λύση

Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1} \Leftrightarrow$

$g(x)\cdot(x^2-1) = f(x) - x^3 \Leftrightarrow g(x)(x^2-1) + x^3 = f(x)$ (1)

από υπόθεση

$\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = 2$ (2)

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Υπολογίστε του $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$

$x \geq 0$

$x \neq 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)(x-1) + x^3 - x}{\sqrt{x}-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)(x^2-1) + x(x^2-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)\cdot\big(g(x)+x\big)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\big(g(x)+x\big)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(g(x)+x)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1} \left[(x+1)(g(x)+x)(\sqrt{x}+1) \right]$$

$$(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) =$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Τεζικυ

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1} = 12$$